

文章编号:1007-2780(2015)02-0340-07

三维医学图像的混合噪声去除方法

赵九龙^{1*}, 马 瑜¹, 李 爽², 孟亚州¹, 白 冰¹

(1. 宁夏大学 研究生院, 宁夏 银川 750021;

2. 上海交通大学 电子与电气工程学院 图像处理与模式识别研究所, 上海 200240)

摘要:针对医学图像在采集传输等过程中易受噪声污染,且目前多数去噪方法对混合噪声去噪效果不好,影响三维重构精度的问题,提出了基于自适应三维分数阶积分和中值滤波结合的混合噪声去除方法。首先介绍了几种传统方法在去除混合噪声中的不足,然后基于三维图像梯度信息提出了三维分数阶积分的自适应分数阶阶数,利用分数阶积分和中值滤波的各自优点,将两者结合对混合噪声去噪,并提出了基于混合去噪的边缘曲面追踪算法。实验结果和数据分析表明,提出的混合去噪方法能够从噪声污染的医学图像切片中追踪出高精度边缘曲面,与传统去噪方法相比,具有更好的去噪效果。

关键词:医学图像;混合噪声;自适应三维分数阶积分;中值;去噪

中图分类号:TP391.41 **文献标识码:**A **doi:**10.3788/JYXS20153002.0340

Mixed noise removing method for three-dimensional medical images

ZHAO Jiu-long^{1*}, MA Yu¹, LI Shuang², MENG Ya-zhou¹, BAI Bing¹

(1. Graduate School, Ningxia University, Yinchuan 750021, China;

2. Institute of Image Processing and Pattern Recognition,
Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Medical images are usually polluted by noise during the process of transmission and collection. A mixed noise removing method based on adaptive three-dimensional (3D) fractional integral and median filtering was proposed to reconstruct high accuracy edge surfaces. Firstly, some traditional methods in denoising were introduced. Then the adaptive order of fractional integral based on the gradient information of three-dimensional image was proposed. Making use of the advantage of fractional integral and median filtering, an edge surface tracking algorithm based on mixed noise denoising method was proposed. The experimental results show that the proposed method can effectively track edge surfaces from noisy medical image slices with high accuracy. The denoised results are better than traditional denoising methods.

Key words: medical image; mixed noise; adaptive 3D fractional integral; median filtering; denoising

收稿日期:2014-05-23;修订日期:2014-07-15.

基金项目:国家自然科学基金(No. 31060233);2012年宁夏自治区科技攻关资助项目(No. 2012ZYG011)

* 通信联系人, E-mail:andy080406@126.com

1 引言

计算机断层扫描 (Computerized Tomography, CT) 和核磁共振 (Nuclear Magnetic Resonance, NMR) 是目前获取医学图像二维切片的主要技术手段,但二维图像有很多局限性,不利于医生及时有效地分析病情,因此近年来,三维医学图像的重构可视化技术方兴未艾^[1-2]。利用医学二维切片重构出的三维医学图像可以清晰、准确地显示病患处的具体轮廓和细节信息,为医生提供更逼真的显示手段以及定量和定性分析工具,极大地提高了医学分析的准确性和有效性。但由于二维医学图像在采集和传输的过程中难免会被噪声污染,较常见的两种噪声是高斯噪声和椒盐噪声。产生的主要原因是:医学成像设备有很多是利用光学成像,如 CT 机为光学成像设备,其图像传感器的光电转换过程中由于原件灵敏度的不均性,会产生高斯噪声,数字化过程的量化误差及人为因素干扰同样会产生高斯噪声;医学成像设备的传输信道、解码处理等过程会产生椒盐噪声。

图像去噪是图像预处理的重要部分,对含噪声图像有效地去噪^[3]有利于后续对图像特征的提取和分析等。若从医学成像设备获取的切片含噪声且不能较好地去噪,很大程度上会影响三维医学图像的重构精度和可视化质量,因此能否有效地去除图像在设备采集及传输中产生的噪声直接影响三维重构和可视化的效果,进而会影响对病情分析的准确性和高效性。

目前多数去噪算法只针对某一种特定噪声且都应用在二维图像,本文将较新颖的分数阶积分去噪算法和经典的非线性中值滤波算法结合,去除三维医学图像的混合噪声。

2 典型去噪方法比较

(1)均值滤波。均值滤波算法是线性滤波算法的代表,其主要原理是用以待处理像素点为中心的若干邻域像素的灰度算数平均值代替待处理像素点灰度值。其对高斯噪声有不错的效果^[4],但是不适合去除突变的噪声,对含细节较多的图像失真较大。

(2)中值滤波。中值滤波有较长的历史,是一

种非线性信号处理方法。其主要思想是基于排序理论,对待处理像素点的某一邻域像素按灰度值排序,取排序后中间值替换当前待处理像素。中值滤波可以一定程度地解决线性滤波后图像细节失真的问题,常用于滤除幅值变化大的椒盐噪声,但需要选择合适大小的滤波窗口,滤波窗过大会过多地破坏图像信息,过小不能去除噪声,文献[5]提出了自适应的中值滤波算法。但对于包含细节信息较多的噪声图像以及每一点均被污染的含高斯噪声图像,中值滤波效果不佳。

(3)高斯去噪。文献[6]中提出了基于高斯去噪的三维边缘曲面追踪算法,将高斯去噪算法应用到三维图像重构中,一定程度地解决了三维边缘曲面追踪算法中图像受高斯噪声污染的问题。

(4)分数阶积分去噪。分数阶微积分由周激流、蒲亦非等人引入数字图像处理领域^[7-9],并验证了分数阶积分较很多传统去噪算法有更好的结果^[7-9]。文献[7]和[9]已证明,由于分数阶积分可以削弱高频信号并极大的非线性保留低频信号,所以分数阶积分可以在去除高频的噪声同时保留低频的图像本身信息,因而其去噪效果较好。文献[10]将分数阶积分理论推广应用至三维,并验证了基于分数阶积分去噪的边缘曲面追踪算法较文献[6]有更好的效果。

以上去噪算法均针对某一种特定噪声,并未考虑混合噪声干扰,本文结合分数阶积分去噪和中值滤波的优点,将两种去噪算法结合应用于三维医学图像混合噪声去除。

3 混合去噪的边缘曲面追踪算法

3.1 三维分数阶积分定义

基于 Riemann-Liouville 三维分数阶积分的离散定义为^[9-10]:

$$\begin{aligned} I_{k-L}^{\nu} f(x-, y, z) = & \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^x (x-\tau)^{-\nu-1} f(\tau, y, z) d\tau \cong \\ & \frac{1}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)} f(x, y, z) + \\ & \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)} f(x-1, y, z) + \\ & \frac{3^{-\nu}-1^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)} f(x-2, y, z) + \end{aligned}$$

$$\frac{4^{-v}-2^{-v}}{\Gamma(-v)(-2v)}f(x-3,y,z)+\cdots+\frac{n^{-v}-(n-2)^{-v}}{\Gamma(-v)(-2v)}f(x-n+1,y,z),v<0,(1)$$

$$\begin{aligned} I_{R-L}^vf(x,y,z)=\\ \frac{1}{\Gamma(-v)}\int_a^t(y-\tau)^{-v-1}f(x,\tau,z)d\tau\cong\\ \frac{1}{\Gamma(-v)(-2v)}f(x,y,z)+\\ \frac{2^{-v}}{\Gamma(-v)(-2v)}f(x,y-1,z)+\\ \frac{3^{-v}-1^{-v}}{\Gamma(-v)(-2v)}f(x,y-2,z)+\\ \frac{4^{-v}-2^{-v}}{\Gamma(-v)(-2v)}f(x,y-3,z)+\cdots+\\ \frac{n^{-v}-(n-2)^{-v}}{\Gamma(-v)(-2v)}f(x,y-n+1,z),v<0,(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{R-L}^vf(x,y,z)=\\ \frac{1}{\Gamma(-v)}\int_a^t(z-\tau)^{-v-1}f(x,y,\tau)d\tau\cong\\ \frac{1}{\Gamma(-v)(-2v)}f(x,y,z)+\\ \frac{2^{-v}}{\Gamma(-v)(-2v)}f(x,y,z-1)+\\ \frac{3^{-v}-1^{-v}}{\Gamma(-v)(-2v)}f(x,y,z-2)+\\ \frac{4^{-v}-2^{-v}}{\Gamma(-v)(-2v)}f(x,y,z-3)+\cdots+\\ \frac{n^{-v}-(n-2)^{-v}}{\Gamma(-v)(-2v)}f(x,y,z-n+1),v<0. \end{aligned}\tag{3}$$

基于二维分数阶积分离散模板^[9]和三维分数阶积分定义,结合三维图像的空间信息,构造三维分数阶积分离散模板如图 1 所示。

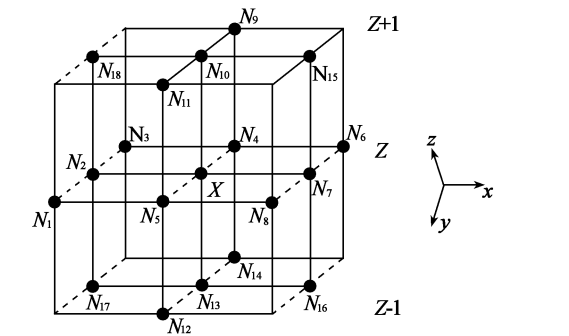


图 1 三维分数阶离散模板
Fig. 1 3D fractional discrete template

图中有 3 层切片,分别为 z 层及其上方的 $z+1$ 层和下方的 $z-1$ 层。如图所示我们选取与中心体素(centre voxel)相邻的 18 个方向体素为三维离散模板的有用体素。18 个方向上滤波结果如下:

$$\begin{cases} V_{N_1}(i,j,k)=\sum_{m=0}^nf_m(i,j,k)\times fe(m)\\ V_{N_2}(i,j,k)=\sum_{m=0}^nf_m(i,j,k)\times fe(m)\\ \vdots\\ V_{N_{18}}(i,j,k)=\sum_{m=0}^nf_m(i,j,k)\times fe(m) \end{cases},(4)$$

其中: $V_{N_\epsilon}(i,j,k)$ 为 18 个方向中某一方向的最终值, $\epsilon=1,2,\cdots 18$ 。 $f_m(i,j,k)$ 为从模板中心体素开始某一方向的第 m 个体素值, $m=0,1,2,n$ 。 $fe(m)$ 为模板中滤波系数,由三维分数阶积分定义的离散表达式(1)~(3)可知取值为:

$$fe(m)=\frac{(m+1)^{-v}-(m-1)^{-v}}{-2v\Gamma(-v)}.$$

3.2 分数阶积分阶数的自适应选择

考虑噪声的高频特性和局部灰度突变的特性,定义梯度判别因子选择自适应分数阶的阶数。三维函数的梯度算子如下:

$$\|\nabla f(x,y,z)\|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.\tag{5}$$

三维函数的梯度计算方式同样为计算函数对不同分量的偏导数,求各偏导数的平方和后取算数平方根作为梯度模值。

在三维图像中,各体素点最小距离为单位一,三维图像的体素值即为离散的三维函数值,对于离散的三维函数采用双向差分值的二分之一来计算梯度。如果三维图像(信号)为 $I(i,j,k)$,则梯度的差分计算规则如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{I(i+1,j,k)-I(i-1,j,k)}{2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{I(i,j+1,k)-I(i,j-1,k)}{2}\\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{I(i,j,k+1)-I(i,j,k-1)}{2} \end{cases}.\tag{6}$$

定义 $G(i,j)$ 为当前体素点的梯度值, $N\in G(i,j)$ 为以当前体素为中心的相邻 18 体素的梯度值, $\epsilon=1,\cdots 18$ 。首先定义梯度判别因子 $J(i,j)$ 为:

$J(i,j)=\min \| G(i,j) - |N_{\epsilon}G(i,j)| \|$, (7)

式中: $\min$ 为取最小值操作, $\|$ 为取模值, 由上式可知, 梯度判别因子 $J(i,j)$ 为当前体素的梯度模值与其三维离散模板内 18 个相邻点梯度模值做差的最小值。则定义自适应分数阶阶数表达式为:

$$v = \begin{cases} \frac{G(i,j)}{\text{Max}G(i,j)+\alpha} & J(i,j) \geq T \\ 0 & J(i,j) < T \end{cases}, \quad (8)$$

其中: α 为调节系数, $\text{Max}G(i,j)$ 为 18 体素点的梯度最大值。 T 为依据不同图像选择的阈值。当所处理体素的梯度值与周边体素的梯度值发生较大变化时, 即梯度判别因子大于给定阈值时, 认定此体素为高频噪声并进行自适应去噪处理。

式(8)自适应分数阶的阶数以当前待处理像素的梯度值为分子, 以 18 邻域内梯度最大值为分母, 当以梯度判别条件判定当前体素为噪声时, 分子即噪声的梯度模值与噪声幅值变化成正比, 对于高斯噪声或椒盐噪声, 其噪声点的梯度即 v 的分子都会较大, 则自适应的阶数 v 也会随之增大, 若噪声幅值较小, 则计算后的梯度模值也相对较小, 与之匹配的是较小的分数阶阶数; 因此, 符合文献[7]中阐述的分数阶的幅频相应特性, 即分数阶阶数越高, 削弱高频噪声的能力越强, 保留低频图像信息能力越强。当梯度判别后不是噪声的点, 采取保留原值的操作, 可以最大程度保留图像原有信息。

由式(4)得对当前体素点滤波后的新的 $I(i,j,k)$ 为:

$$I(i,j,k) = \frac{1}{18} \sum_{\epsilon=1}^{18} V_{N_{\epsilon}}(i,j,k), \quad (9)$$

式中的 $I(i,j,k)$ 即为经过自适应分数阶积分去噪后的新的体素。在求得 18 个方向的卷积值后取算术平均即为新的体素值。按此规则用三维分数阶离散模板遍历整个三维带噪图像(数据), 即完成一次自适应分数阶积分去噪。

3.3 中值滤波

自适应分数阶积分可以更好地去除混合噪声中的高斯噪声, 对幅值突变明显的椒盐噪声也有一定削弱作用, 但是对灰度值变化较明显的噪声, 中值滤波更为有效, 在经自适应分数阶积分滤波后, 再用中值滤波进行进一步去噪, 去除分数阶积分滤波后幅值仍较大或较小的噪声。

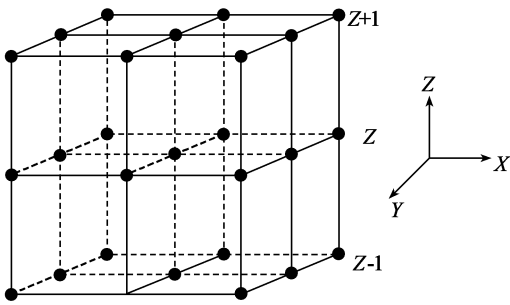


图 2 中值滤波模板
Fig. 2 Median filter template

图 2 所示为中值滤波的 $3 \times 3 \times 3$ 模板, 以当前待处理体素为中心, 其周围紧邻的 26 个体素为影响体素, 对此 27 个体素进行排序, 取中值作为滤波结果。文献[5]中改进的自适应中值滤波模板最多取到超过 11×11 , 考虑到三维数据量较大, 过大的滤波模板会将更多的无关体素考虑在内, 且计算量急剧增长, 因此兼顾计算量, 图中 $3 \times 3 \times 3$ 模板已包含 27 个体素, 可以达到中值滤波的效果。

3.4 边缘曲面追踪算法

三维边缘曲面追踪算法数学模型为:

$$\begin{cases} \nabla^2 f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \|\nabla f(x,y,z)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \end{cases} \quad (10)$$

式中: $f(x,y,z)$ 为三维体数据, $\nabla^2 f(x,y,z)$ 为三维函数 $f(x,y,z)$ 的 Laplacian 算子, $\|\nabla f(x,y,z)\|$ 为三维函数 $f(x,y,z)$ 的梯度模值。在三维边缘曲面重构算法中 Laplacian 算子可检测并抽取三维边缘曲面的零交叉等值面, 梯度算子可用来追踪到高亮度的边缘曲面, 其中梯度算子和 Laplacian 算子均为离散值。三维边缘曲面追踪算法的详细描述见文献[11]和[12]。

3.5 基于混合去噪的边缘曲面追踪算法

基于自适应三维分数阶积分和中值去噪的边缘曲面追踪算法步骤如下:

- (1) 利用自适应分数阶积分和中值滤波对噪声污染的三维切片进行去噪;
- (2) 利用 2.4 节中介绍的算法追踪三维边缘曲面;
- (3) 计算三维边缘曲面片并将其三角片化;

(4) 通过计算机图形学技术可视化三维边缘曲面;

已被噪声污染的三维图像(数据) $f(x, y, z)$ 经自适应三维分数阶积分和中值去噪后变为 $I(x, y, z)$, 从去噪后的 $I(x, y, z)$ 追踪边缘曲面, 基于混合去噪的边缘曲面追踪算法如下:

$$\begin{cases} \nabla^2 I(x, y, z) = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} \\ \|\nabla I(x, y, z)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)^2} \end{cases} \quad (11)$$

4 实验结果与分析

实验以 Visual C++2010 结合 OpenGL 为仿真环境。

为验证本文算法有效性, 采用一组婴儿头部的 CT 图像进行验证。图 3 为婴儿头部图像的三维重建原图以及不同去噪算法的处理结果。

如图 3 所示, 图 3(c) 的均值去噪, 图 3(d) 的中值去噪和图 3(e) 的经分数阶阶数为 0.5 的分数阶积分去噪对高斯噪声和椒盐噪声的混合噪声去噪效果均不是很好; 图 3(c) 均值去噪后仍有较明显的黑色暗点块和明显的凸凹不平, 图 3(d) 中值去噪后整体仍有高斯噪声引起的凸起等噪声, 图 3(e) 为经固定分数阶次为 0.5 的分数阶积分去噪结果, 虽然取得了一定的去噪结果, 但相比于本文算法仍有不足之处。图 3(f) 为经自适应分数阶积分和中值结合去噪后的结果, 相对于前几种单一算法, 明显地减少了噪声干扰。

二维数字图像的去噪结果常采用峰值信噪比 (Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR) 和均方误差

(Mean Square Error, MSE) 来客观评价, 三维数据中我们定义并采用体数据峰值信噪比 (Volumetric Peak Signal-to-Noise Ratio, VPSNR) 和体数据均方误差 (Volumetric Mean Square Error, VMSE)^[7,10,13] 来客观评价去噪效果, 定义如下:

$$\begin{cases} \text{VMSE} = \frac{1}{m \times n \times l} \times \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l (I(i, j, k) - I^*(i, j, k))^2 \\ \text{VPSNR} = 10 \lg(\max(I, I^2 / \text{VMSE}) \end{cases} \quad (12)$$

式中: m, n 和 l 为三维图像(数据)规模大小, $I(i, j, k)$ 为源图像, $I^*(i, j, k)$ 为去噪后的图像。显然体数据峰值信噪比越大且体数据均方误差越小说明去噪效果越好。

表 1 为不同去噪方法的体数据均方误差和体数据峰值信噪比。由体数据均方误差和体数据峰值信噪比的定义可知, 三维图像去噪后的体数据均方误差越小, 体数据峰值信噪比越大说明去噪效果越好。从表中可以看出, 对于混合噪声, 传统的去噪方法体数据均方误差均较大, 本文自适应分数阶积分与中值结合的方法可以获得更小的均方误差和更大的峰值信噪比。

表 1 不同去噪方法的体数据均方误差和体数据峰值信噪比

去噪方法	婴儿头部图像	
	VMSE	VPSNR
中值	698.45	19.68
均值	677.36	20.03
固定阶分数阶积分	631.25	20.12
自适应分数阶积分结合中值	243.95	23.70

5 结 论

目前去噪算法很多, 各有利弊。对于椒盐噪声, 已经出现了很多改进的中值滤波算法, 分数阶积分去噪历史较短, 但对于高斯噪声去噪效果不错。对于高斯噪声与椒盐噪声的混合噪声, 相关的去噪方法较少, 本文提出了针

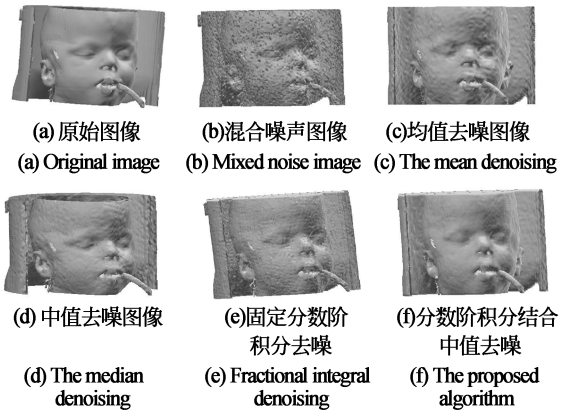


图 3 婴儿头部图像

Fig. 3 Denoising results of infant image

对不同梯度信息的自适应分数阶积分,并与中值滤波相结合,应用于三维医学图像的混合噪声去除。实验结果中本文算法对图像去噪后的 VMSE 降低至 243.95, VPSNR 提高到 23.70,实验结果表明,本文方法可以取得相对不错的去噪效果。

本文将较新颖的分数阶积分和经典的中值滤

波结合用于混合噪声去除。分数阶积分核心思想是加权平均的平滑滤波过程,中值对于灰度值极高或极低的椒盐噪声有良好的效果,本文处理后三维图像虽有相对好的效果,但细节保留不够好,整体略显平滑。如何更好地利用分数阶积分和中值的特性,完全实现混合噪声的自适应去除,将是下一步研究的方向。

参 考 文 献:

- [1] 武君胜,杨红远,谌洪初. 医学 TPS 中放射线剂量分布的三维可视化方法[J]. 计算机应用, 2010, 30(3): 582-584.
Wu J S, Yang H Y, Chen H C. 3D visualization method of radiotherapy dose distribution in medical TPS [J]. *Journal of Computer Applications*, 2010, 30(3): 582-584. (in Chinese)
- [2] 李祥,傅俊琼. 基于图像融合的微表面快速三维重构算法研究[J]. 计算机应用研究, 2009, 26(10): 3992-3994.
Li X, Fu J Q. 3D reconstruction algorithm for micro-surface based on image fusion [J]. *Application Research of Computer*, 2009, 26(10): 3992-3994. (in Chinese)
- [3] 董雪,林志贤,郭太良. 基于 LoG 算子改进的自适应阈值小波去噪算法[J]. 液晶与显示, 2014, 29(2): 275-280.
Dong X, Lin Z X, Guo T L. Improved self-adaptive threshold wavelet denoising analysis based on LoG operator [J]. *Chinese Journal of Liquid Crystals and Displays*, 2014, 29(2): 275-280. (in Chinese)
- [4] 陈明举. 基于统计特性的非局部均值去噪算法[J]. 液晶与显示, 2014, 29(3): 450-454.
Chen M J. Non-local means image denoising algorithm based on statistical property [J]. *Chinese Journal of Liquid Crystals and Displays*, 2014, 29(3): 450-454. (in Chinese)
- [5] 郭海霞,解凯. 一种改进的自适应中值滤波算法[J]. 中国图象图形学报, 2007, 12(7): 1185-1188.
Guo H X, Xie K. An improved method of adaptive median filter [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2007, 12(7): 1185-1188. (in Chinese)
- [6] Ma Y, Zhang Y N, Wang Y G, et al. An improved denoised 3D edge extraction operator within biomedical images [C]. *Berling: CMSP 2012, Springer Communications in Computer and Information Science*, 2012, 346: 309-316.
- [7] Hu J R, Pu Y F, Zhou J L. A novel image denoising algorithm based on Riemann-Liouville definition [J]. *Journal of Computers*, 2011, 6(7): 1332-1338.
- [8] 赵健. 分数阶微分在图像纹理增强中的应用[J]. 液晶与显示, 2012, 27(1): 121-124.
Zhao J. Fractional differential and its application in image texture enhancement [J]. *Chinese Journal of Liquid Crystals and Displays*, 2012, 27(1): 121-124. (in Chinese)
- [9] 刘彦,蒲亦非,周激流. 一种基于分数阶积分的数字图像去噪算法[J]. 四川大学学报: 工程科学版, 2011, 43(3): 90-95.
Liu Y, Pu Y F, Zhou J L. A digital image denoising method based on fractional calculus [J]. *Journal of Sichuan University: Engineering Science Edition*, 2011, 43(3): 90-95. (in Chinese)
- [10] 马瑜,张艳宁,王利生. 噪音工业计算机断层图像中追踪三维边缘曲面[J]. 光子学报, 2013, 42(8): 916-923.
Ma Y, Zhang Y N, Wang L S. Three dimensional edge surfaces tracked from noisy industrial CT slice images [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2013, 42(8): 916-923. (in Chinese)
- [11] Wang L S, Bai J, Ying K. Adaptive approximation of the boundary surface of a neuron in confocal microscopy volumetric images [J]. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 2003, 41(5): 601-607.
- [12] 马瑜,王利生,唐渊圆. 三维图像中阶梯型边缘曲面的追踪算法[J]. 计算机辅助设计与图形学报, 2007, 19(3): 329-333.
Ma Y, Wang L S, Tang Y Y. A novel algorithm for tracking step-like edge surfaces within 3D images [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2007, 19(3): 329-333. (in Chinese)

[13] 黄果, 蒲亦非, 陈庆利, 等. 基于分数阶积分的图像去噪[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(4): 925-932.
Huang G, Pu Y F, Cheng Q L, *et al.* Research on image denoising based on fractional order integral [J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 33(4): 925-932. (in Chinese)

[14] Tao R, Deng B, Wang Y. Research progress of the fractional Fourier transform in signal processing [J]. *Science in China Series F*, 2006, 49(1): 1-25.

[15] Oldham K B, Spanier J. *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order* [M]. New York: Academic Press, 1974.

[16] Podlubny I. *Fractional Differential equations: An introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, To methods of Their Solution and Some of Their Applications* [M]. Academic press, 1998.

作者简介:赵九龙(1989—),男,吉林磐石人,硕士研究生,主要研究方向:数字图像增强与去噪、分数阶微积分。E-mail: andy080406@126.com